令和３年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

2. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
   問題冊子１部，解答用紙４枚，下書き用紙２枚

3. 問題は全部で４題あります。４題すべて解答してください。
   各解答用紙に受験番号を記入してください。

4. 解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

5. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。

6. 問題ごとに解答用紙があります。
   解答は指定された解答用紙に記入してください。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$ を 0 でない実数からなる数列とする。次の命題

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies 「\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty \text{ または } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty」$$

が真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(2) 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(3) 次の極限の収束，発散について調べ，収束すればその極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$$

2 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & 3 & 4 \\ -4 & 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ。

(1) A の行列式の値を求めよ。

(2) A の固有値をすべて求めよ。

(3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

(4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ。

3 正の実数 s, p, q に対して，

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx, \qquad B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$$

と定める。次の各問いに答えよ。

(1) $s, t > 0$ とし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < \infty,\ 0 \leq y < \infty\}$ とする。重積分 $\displaystyle\iint_D x^{s-1} y^{t-1} e^{-(x+y)}\, dxdy$ に対して，$x = uv,\ y = u - uv$ と変数変換することにより

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)B(s,t)$$

が成り立つことを示せ。

(2) $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta \cdot \sin^{2q-1}\theta\, d\theta$ であることを示せ。さらに $\Gamma(2^{-1})$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2}\, dr$ の値を求めよ。

4 各成分が実変数 t の微分可能な実関数である 2×2 行列を $A=\begin{pmatrix} p(t) & q(t) \\ r(t) & s(t) \end{pmatrix}$ とし，A は各 t に対して正則であるとする。また，

$$\frac{d}{dt}A=\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}p(t) & \frac{d}{dt}q(t) \\ \frac{d}{dt}r(t) & \frac{d}{dt}s(t) \end{pmatrix}$$

と定義する。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\frac{d}{dt}(A^2)=\left(\frac{d}{dt}A\right)A+A\left(\frac{d}{dt}A\right)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\frac{d}{dt}(A^{-1})=-A^{-1}\left(\frac{d}{dt}A\right)A^{-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\frac{d}{dt}|A|=|A|\,\mathrm{tr}\left\{A^{-1}\left(\frac{d}{dt}A\right)\right\}$ が成り立つことを示せ。ここで，$|A|$ は行列 A の行列式を表し，$\mathrm{tr}\{B\}$ は行列 B のトレースを表す。