

令和4年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部、解答用紙4枚、下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4題あります。4題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。
6. 問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。

1 次の各問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。 $x^2 \cos x$ の n 次導関数を求めよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{x+3}{(x+1)^2(x-2)} dx$ を求めよ。

(3) 不定積分 $\int \frac{1}{2+\cos x} dx$ を求めよ。

[2] 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ。
- (5) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

[3] 3点 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ を頂点とする三角形 ABC の内部を D とする。

D 内の点 $P(x,y)$ と三角形 ABC の 3 つの辺 AB, BC, CA の距離をそれぞれ d_1, d_2, d_3 とし、関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ として定義する。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 2変数関数 $f(x,y)$ を求めよ。
- (2) 点 $P(x, \frac{1}{2})$ が D 内を動くとき、関数 $f(x, \frac{1}{2})$ の最小値を求めよ。
- (3) 点 $P(x,y)$ が D 内を動くとき、関数 $f(x,y)$ の最小値を求めよ。

4 \mathbb{R}^m を m 次元数ベクトル空間, \mathbb{R}^n を n 次元数ベクトル空間とする。 f, g を \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への線形写像とする。 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への写像 h を

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m)$$

により定める。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) h は \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^n への線形写像となることを証明せよ。
- (2) $\text{Im}(f), \text{Im}(g), \text{Im}(h)$ をそれぞれ、 f, g, h の像空間とする。このとき、

$$\dim(\text{Im}(h)) \leq \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g))$$

が成り立つことを証明せよ。

- (3) A, B を実数を成分とする $n \times m$ 行列とする。このとき、

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

が成り立つことを証明せよ。