

課題レポートの例

中学1年生

No. _____

Date _____

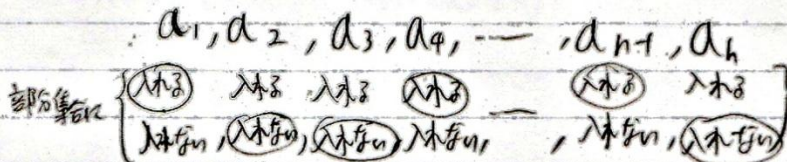
問題[2] n 個の要素からなる集合の部分集合(空集合も考え)は全部で
 2^n 通りであることを示せ。

この集合の要素を順に $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ とする。

ここで、部分集合を作るとき(空集合も考え)は、

各要素に対して、必ず部分集合に入れたり、入れたりしない。

必ず入れたりしないか、入れたりするかの2通りである。



↓
部分集合 { a_1, a_2, \dots, a_{n-1} }

すなわち、 n 個の要素に対し、2つの選択肢があるので、

$$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 \times 2 = 2^n \text{通りである。}$$

よって 2^n 通りの部分集合がある。

(証明終り)

問[6] $\sqrt{2}$ が有理数でないことを示せ。

$\sqrt{2}$ が有理数だとすると、互いに素である有理数を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$a = \sqrt{2}b$$

$$a^2 = 2b^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

よって a^2 は偶数、 $\textcircled{1}$ より b も偶数である。

ゆえに、 a はある自然数 c を用いて

$$a = 2c$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$(2c)^2 = 2b^2$$

$$4c^2 = 2b^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

よって b^2 は偶数、 $\textcircled{1}$ より b も偶数である。しかし、これは

a と b が互いに素であることに矛盾する。

$\textcircled{1}$ より $\sqrt{2}$ は有理数ではない。

問[3] 自然数全体の集合 \mathbb{N} のカーディナル数と奇数全体の集合のカーディナル数は等しいか？理由をつけて答えよ。

等しい。

自然数をとる。

自然数の要素のうち奇数の n と、奇数全体の集合の要素の n を

対応して、自然数の要素のうち偶数の n と、奇数全体の集合の

要素 $-(n-1)$ を対応させれば、1対1に対応する。

したがって、等しくなる。