

平成28年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学科

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部、解答用紙4枚、下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4問あります。4問すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。
6. 問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。

1 自然数 n に対して,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx, \quad J_n = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^2 dx$$

とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1) 次の公式を利用して, $I_{n+2} = I_n$ を示せ。

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

(2) I_n を求めよ。

(3) 数列 $\{J_n\}$ が等差数列になることを示せ。

(4) J_n を求めよ。

2 行列式に関する、次の各問いに答えよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 103 & 103 & 101 \\ 98 & 100 & 101 \\ 99 & 97 & 98 \end{vmatrix} \text{の値を求めよ。}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & a & b^2 & 1 \\ 1 & a^2 & b^3 & c \\ 1 & a^3 & b^4 & c^2 \\ 1 & a^4 & b^5 & c^3 \end{vmatrix} \text{を因数分解せよ。}$$

$$(3) \text{方程式 } \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & a \\ x & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & x \\ a & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{を解け。ただし, } a \text{は実定数とする。}$$

3 正の定数 $a > 0$ と自然数 n に対して, 等式

$$\left(1 + \frac{b_n}{n}\right)^n = 1 + a$$

が成り立つように数列 $\{b_n\}$ を定める。また, 関数 $f(x)$ を $f(x) = (1 + a)^x$ により定める。このとき, 次の各問いに答えよ。

- (1) b_n を a と n を用いて表せ。
- (2) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。
- (4) b_n と b_{n+1} の大小関係を不等式で表せ。

4 V_1 と V_2 を 3次元ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の線形部分空間とし,

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $V_1 \cap V_2$ と $V_1 + V_2$ は \mathbb{R}^3 の線形部分空間になることを示せ。
(2) $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ で $V_1 \neq V_2$ と仮定する。このとき、 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ を示せ。

(3) V_1 は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される \mathbb{R}^3 の線形部分空間とし,

V_2 は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される \mathbb{R}^3 の線形部分空間とする。

このとき、 \mathbb{R}^3 の線形部分空間 $V_1 \cap V_2$ の基底を一組求めよ。