

平成29年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学科

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部、解答用紙4枚、下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4問あります。4問すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。
6. 問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数を求めよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ を求めよ。

(3) 不定積分 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよ。

2 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ。

3 2変数関数 $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^4 - \frac{2}{3}y^3 + 1$ について、次の各問いに答えよ。

- (1) 曲面 $z = f(x, y)$ の点 $(1, 1, \frac{13}{3})$ における接平面の方程式を求めよ。
- (2) 関数 $f(x, y)$ の極値を求めよ。
- (3) 平面 $z = 2x + 2y + b$ が曲面 $z = f(x, y)$ のある点における接平面となるような b の値をすべて求めよ。

4 4次元数ベクトル空間 \mathbb{R}^4 の部分集合 W_1 を次のように定める。

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) W_1 は \mathbb{R}^4 の線形部分空間になることを示せ。
- (2) W_1 の基底を求めよ。
- (3) 線形変換 $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ の像 $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4\}$ が W_1 であると仮定する。このとき、 f の核 $\text{Ker}(f)$ の次元を求めよ。
- (4) W_2 は \mathbb{R}^4 の2次元線形部分空間で、 $W_1 \cup W_2$ が \mathbb{R}^4 の線形部分空間であると仮定する。このとき、 $W_1 = W_2$ となることを示せ。