

平成30年度

## 新潟大学理学部第3年次編入学試験

### 数学科

### 筆記試験問題（数学）

#### 注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。  
問題冊子1部、解答用紙4枚、下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4問あります。4問すべて解答してください。  
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。
6. 問題ごとに解答用紙があります。  
解答は指定された解答用紙に記入してください。

**1** 次の各問いに答えよ。

(1)  $n$  を  $n \geq 2$  となる自然数とし,  $t$  を  $0 < t < 1$  となる実数とする。このとき,  $(1-t)^n$  と  $1-nt$  の大小関係を不等式で表せ。

(2)  $a, b$  を  $0 < a < b < 1$  となる実数とする。このとき, 定積分  $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$  を求めよ。

2  $4 \times 4$  行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1)  $A$  の行列式の値を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値をすべて求めよ。
- (3)  $A$  の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4)  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  と  $P^{-1}$  を求め、 $A$  を対角化せよ。

**3** 自然数  $n$  に対して,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

と定義する。このとき、次の各問いに答えよ。

(1)  $H_1(x)$ ,  $H_2(x)$ ,  $H_3(x)$ ,  $H_4(x)$  を求めよ。

(2)  $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$  を示せ。

(3)  $H_n(x)$  は  $n$  次の多項式であることを示せ。

(4)  $n \geq 3$  のとき、任意の実数  $T > 0$  に対して

$$\int_0^T xH_n(x)e^{-x^2} dx = -TH_{n-1}(T)e^{-T^2} - H_{n-2}(T)e^{-T^2} + H_{n-2}(0)$$

となることを示せ。

(5) 広義積分  $\int_0^\infty xH_6(x)e^{-x^2} dx$  を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。

(1) 実対称行列の固有値はすべて実数であることを示せ。

(2) 実変数  $x, y, z$  に対して, 関数  $f(x, y, z)$  を

$$f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 4zx$$

により定める。このとき, 条件  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  のもとで,  $f(x, y, z)$  の最大値と最小値を求めよ。