

平成31年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。  
問題冊子1部，解答用紙4枚，下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4題あります。4題すべて解答してください。  
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。
6. 問題ごとに解答用紙があります。  
解答は指定された解答用紙に記入してください。

1 整数  $n \geq 0$  に対して,  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$  とする。次の各問いに答えよ。

(1) 自然数  $n$  に対して  $I_{2n-1} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{2n \cdot (2n)!}$ ,  $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$  であることを示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!}$  を求めよ。

2  $4 \times 4$  行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1)  $A$  の行列式の値を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値をすべて求めよ。
- (3)  $A$  の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4)  $P^{-1}AP$  が対角行列となる正則行列  $P$  と  $P^{-1}$  を求め、 $A$  を対角化せよ。

- 3**  $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$  における実数値関数  $f(x, y) = \sin^2 x - 3 \sin(x + y)$  の最大値と最小値を求めよ。また、その時の  $(x, y)$  のすべての組を求めよ。

4 3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  の平面  $L$  を次のように定める。

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}$$

線形変換  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $\mathbb{R}^3$  から平面  $L$  への射影とする。すなわち、任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  について、 $f(\mathbf{x})$  は平面  $L$  上にあり、 $\mathbf{x} - f(\mathbf{x})$  は平面  $L$  に垂直なベクトルとなる。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) ベクトル  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  に対して、

$f(\mathbf{e}_1)$ ,  $f(\mathbf{e}_2)$ ,  $f(\mathbf{e}_3)$  を求めよ。

(2)  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ) を満たす行列  $A$  を求めよ。

(3)  $f$  の像空間  $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  の基底を一組求めよ。

(4)  $f$  の核空間  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  の基底を一組求めよ。