

令和5年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部、解答用紙4枚、下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4題あります。4題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。
4. 解答時間は、120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = (x^4 + x^2 + 4x + 4)^{\sin(x - \frac{\pi}{2})}$ の導関数を求めよ。

(2) 不定積分 $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} dx$ を求めよ。

(3) 次の極限の収束，発散について調べ，収束すればその極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \log(x-1)}{-1 + \cos(x-2)}$$

2 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P を求め、 A を対角化せよ。ただし、 A が対角化できない場合には、その理由を説明せよ。
- (5) 自然数 n に対して、 A^n を求めよ。

3 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の極座標を

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

によって与える。ここで、 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 座標 (x, y, z) の (r, θ, φ) に対するヤコビアン $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を求めよ。

(2) $0 \leq t \leq 1$ とする。有界閉領域

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid t^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq t, z \geq 0\}$$

の体積を求めよ。

(3) (2) で求めた体積を $V(t)$ とする。 $V(t)$ の最大値を求めよ。

4 n を 2 以上の自然数とし、 V を n 次元線形空間とする。 W_1 と W_2 を V の $(n-1)$ 次元線形部分空間で $W_1 \neq W_2$ となるものとする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$ は V の線形部分空間になることを証明せよ。

(2) $W_1 \cap W_2$ と $W_1 + W_2$ の次元を求めよ。

(3) $V = \mathbb{R}^3$ は 3 次元数ベクトル空間であるとし、 X_1 を V の 2 つの元 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される V の線形部分空間とし、 X_2 を V の 2 つの元

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ で生成される V の線形部分空間とする。このとき、

$X_1 \cap X_2$ と $X_1 + X_2$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ。