

令和7年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部，解答用紙4枚，下書き用紙2枚
3. 問題は全部で4題あります。各解答用紙に受験番号を記入してください。
問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。
4. 解答時間は，120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 広義積分 $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$ を求めよ。

(2) $a > 0$ とする。広義積分 $\int_0^\infty (\sqrt{x^2+1} - x)^a dx$ を求めよ。

(3) 広義積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x) dx$ を求めよ。

2 4×4 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) A の行列式の値を求めよ。
- (2) A の固有値をすべて求めよ。
- (3) A の各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。
- (4) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め、 A を対角化せよ。

3 実数値関数

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$$

について、次の各問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x, y)$ の極値をすべて求めよ。
- (3) 関数 $f(x, y)$ に最大値は存在するかどうか判定せよ。

4 実数 $\mathbb{R}$ 上で定義された高々5次以下の多項式関数全体の集合を P とし,

$$V = \{f \in P \mid f(-x) = f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{f \in P \mid f(-x) = -f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

と定める。次の各問いに答えよ。

(1) P の元の和と実数倍を次のように定義すると, P は線形空間となる。

$$f, g \in P \text{ に対して, } (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$f \in P \text{ と } \alpha \in \mathbb{R} \text{ に対して, } (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

このとき, V と W が P の線形部分空間であることを示せ。

(2) P が V と W の直和で表されることを示せ。

(3) 線形空間の基底の定義を述べよ。また, V と W の基底をそれぞれ一組求めよ。