令和８年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

数学プログラム

筆記試験問題（数学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

2. 試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
   問題冊子１部，解答用紙４枚，下書き用紙２枚

3. 問題は全部で４題あります。各解答用紙に受験番号を記入
   してください。
   問題ごとに解答用紙があります。
   解答は指定された解答用紙に記入してください。

4. 解答時間は，１２０分です。途中で退席することはできません。

5. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-4x+5}\,dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$ を求めよ。

(3) $a>0$ とする。広義積分 $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{1}{\sqrt{|x(x-a)|}}\,dx$ を求めよ。

2 3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

について，次の各問いに答えよ。

(1) A の行列式の値を求めよ。

(2) A の固有値をすべて求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P と P^{-1} を求め，A を対角化せよ。

(4) 正の偶数 n に対して，$A + A^2 + \cdots + A^n$ を求めよ。

3 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の有界閉領域 V, W を

$$V = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-a)^2 + z^2 \leqq b^2\ \}$$
$$W = V \cap \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \geqq 0\}$$

と定める。ただし，$a > b > 0$ とする。次の各問いに答えよ。

(1) $0 \leqq r \leqq b,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ に対して,

$$\begin{cases} x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

とおく。座標 (x,y,z) の (r,θ,φ) に対するヤコビ行列式 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。

(3) $\displaystyle\iiint_W y\ dxdydz$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 自然数 n に対して複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合を $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とする。次の各問いに答えよ。

(1) $T, S, R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ が

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

の形であるとき，$t_{11} = s_{22} = r_{33} = 0$ であるならば，TSR は零行列であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n と任意の $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ に対し，ある正則な $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

の形にできることを示せ。すなわち，$P^{-1}AP$ の i 行 j 列成分を t_{ij} と表すとき，$i > j$ であるようなすべての組 (i, j) に対して $t_{ij} = 0$ とできることを示せ。

(3) n を自然数とし，A, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ とする。ある零行列でない $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ が存在して $AX = XB$ が成り立つならば，A と B は共通の固有値を少なくとも一つもつことを示せ。