

令和 6 年度

新潟大学理学部学校推薦型選抜

数学プログラム

基礎学力試験問題

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子 1 部，解答用紙 4 枚，下書き用紙 2 枚
3. 問題は全部で 4 題あります。各解答用紙に受験番号を記入してください。
問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。
4. 解答時間は，120 分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後，問題冊子と下書き用紙は各自持ち帰ってください。

1 次の問いに答えよ。

- (1) niigata という単語の 7 個の文字を横一列に並べるとき、その並べ方の総数を求めよ。
- (2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。
- (3) 点 P が放物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ 上を動くとき、点 P から直線 $y = x + 2$ への距離の最小値を求めよ。
- (4) $a > 0$ とする。定積分 $\int_0^1 |x^2 - a^2| dx$ を求めよ。

2 三角形 OAB において、辺 OA の中点を M とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{OP} = \vec{b} + k\vec{a}$ ($0 < k < 1$) となる点 P を考え、線分 OP と辺 AB の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 Q が辺 AB を 2 : 1 に内分するときの k の値を求め、 $\overrightarrow{MQ}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) $0 < t < \frac{1}{2}$ となる t に対して、 $BQ : QA = t : 1 - t$ であるとする。直線 MQ と直線 OB の交点を C とするとき、 $\overrightarrow{OC}$ を t と $\vec{b}$ を用いて表せ。また、3 点 A, P, C は一直線上にあることを証明せよ。
- (3) $0 < t < \frac{1}{3}$ となる t に対して、 $BQ : QA = t : 1 - t$ であるとする。 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ で $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{AP}$ が垂直であるとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を t を用いて表せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ を証明せよ。

(2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ を求めよ。

(3) a は定数とする。方程式 $x \log x = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

4 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{4a_n - 5}{a_n - 2}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \frac{a_n - \alpha}{a_n - \beta}$ で定めたとき, $\{b_n\}$ が等比数列となるような整数 α, β を求めよ。ただし, $\alpha > \beta$ とする。

(2) (1) で定めた等比数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。