平成２７年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
　問題冊子１部，解答用紙３枚

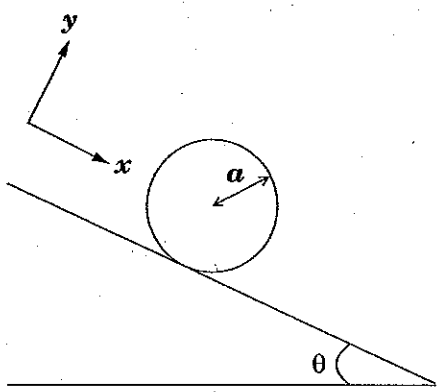
３．問題は全部で３問あります。３問すべて解答してください。
　各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

図のように，水平面と傾斜角 θ をなす摩擦のある斜面上に，半径 a，質量 M，中心軸まわりの慣性モーメント I をもつ一様な円柱がある。この円柱が常に中心軸を水平に保ったまま滑らずに転がり落ちる運動を考える。斜面に平行な方向を x 軸，斜面に垂直な方向を y 軸，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。



1. 斜面が円柱に及ぼす垂直抗力の大きさを N，円柱に働く静止摩擦力の大きさを R とする。円柱の重心の速さを v，中心軸まわりの角速度の大きさを ω として，円柱の重心の運動方程式と，中心軸まわりの回転の運動方程式をそれぞれ書け。

2. 円柱と斜面が接する点が瞬間的に静止する条件を a，v，ω を用いて表せ。

3. 円柱の重心の加速度の大きさを求めよ。また，時刻 $t=0$ における円柱の重心位置が $x=0$ にあり，速さが 0 であるとしたとき，時刻 t における重心位置の x 成分を求めよ。

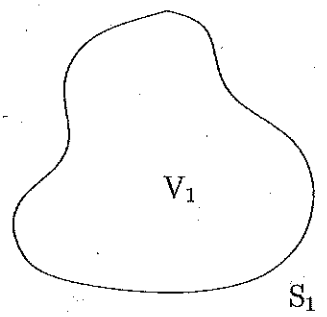
4. 円柱と斜面の静止摩擦係数を μ としたとき，円柱が斜面上を滑らずに転がるための μ に対する条件を求めよ。

5. 円柱の重心の並進運動エネルギーを E_1，中心軸まわりの回転運動エネルギーを E_2 とする。このとき，E_1 と E_2 の和を時間微分したものが，重力のする仕事率となることを示せ。

6. 円柱のかわりに，同じ半径，同じ質量をもち，中が空洞である一様な円筒の運動を考える。このとき，滑らずに転がり落ちる速さは円柱の場合に比べて，速くなるか，遅くなるか，その理由を含めて答えよ。

II.

1. 図のように，閉曲面 S_1 を表面とする導体が真空中に置かれている。



時刻 t，導体内部の点 $\vec{r}$ における電荷密度，電流密度をそれぞれ $\rho(\vec{r},t)$，$\vec{j}(\vec{r},t)$ とすると，連続の方程式

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \ = \ 0$$

が成り立つ。また，導体内の電流密度はその点における電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ に比例し，電気伝導率を σ とすると，微視的なオームの法則

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sigma \vec{E}(\vec{r},t)$$

が成り立つものとする。真空中の誘電率を ε_0 として，以下の問いに答えよ。

a. 導体内の全電荷 $Q = \int_{\mathrm{V}_1} \rho(\vec{r},t)\, dv$ は保存される。このことを連続の方程式を用いて示せ。ここで，dv は微小体積要素であり，積分領域 V_1 は S_1 を表面とする導体全体である。ただし，必要ならば，次の発散定理を用いよ。

$$\int_{\mathrm{V}_1} \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\, dv \ = \ \int_{\mathrm{S}_1} \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{n} dS\ .$$

ここで，dS は曲面 S_1 上の微小面積要素，$\vec{n}$ は外向きの単位法線ベクトルである。

b. 電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ の発散と電荷密度 $\rho(\vec{r},t)$ の関係式を書け。また，この関係式の名称を答えよ。

c. 連続の方程式と微視的なオームの法則を連立させると，電荷密度の時間変化を表す式

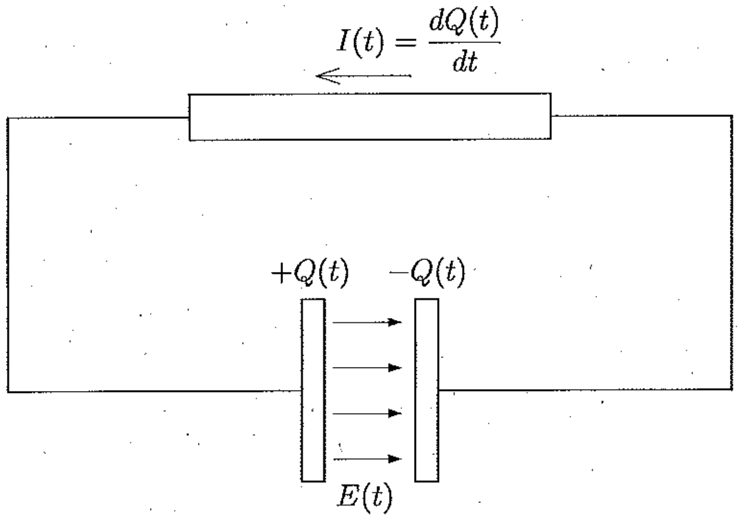
$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} \ = \ -\frac{1}{T_1}\rho(\vec{r},t)$$

が得られる。このとき，時定数（時間の次元をもつ定数）T_1 を ε_0 および σ で表せ。

d. 時刻 $t=0$ に一様な電荷密度 $\rho(\vec{r},0)=\rho_0$ が導体内部に与えられたとする。その後の時刻 t における導体内部の電荷密度 $\rho(\vec{r},t)$ を求めよ。

e. 導体の電気伝導率が $\sigma = 4.5\times 10^{7}$ A/V·m であるとき，時定数 T_1 の値を計算せよ。ただし，真空の誘電率の値を $\varepsilon_0 = 9\times 10^{-12}$ C/V·m とせよ。

2. 図のように，静電容量 C の平行板コンデンサと抵抗値 R の抵抗からなる回路がある。時刻 t において，コンデンサに蓄えられている電荷を $Q(t)$ とし，抵抗を流れる電流を $I(t)$ とする。コンデンサの極板の面積を S，極板間の誘電率を ε とするとき，以下の問いに答えよ。



a. 電荷 $Q(t)$ の時間変化を表す式

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{1}{T_2}Q(t)$$

を導き，時定数 T_2 を抵抗値 R および静電容量 C を用いて表せ。

b. $R = 2\,\mathrm{m}\Omega$，$C = 0.01\,\mu\mathrm{F}$ のときの T_2 の値を計算せよ。

平行板コンデンサの極板間では，電流 $I(t)$ は流れていないが，電場ができている。極板間の電場は，極板間の距離が十分小さいため一様とみなせるものとし，電荷 $+Q(t)$ の極板から電荷 $-Q(t)$ の極板へ向かう電場を $E(t)$ とする。

c. 電場 $E(t)$ を求めよ。

d. 時間的に変動する電場 $E(t)$ に対して，$j_{\mathrm{D}}(t) = \varepsilon \dfrac{dE(t)}{dt}$ を変位電流の密度という。コンデンサの極板間の変位電流 $I_{\mathrm{D}}(t) = j_{\mathrm{D}}(t)\,S$ が，抵抗を流れる電流 $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ に等しいことを示せ。

III.

1. 力の場 $\vec{F}=(-ay,ax,-bz)$ がある。ここで，a と b は定数，$\vec{r}=(x,y,z)$ は位置ベクトルである。以下の問いに答えよ。

a. $\vec{F}$ の発散 $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ と回転 $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ をそれぞれ求めよ。

b. $\vec{F}$ が保存力であるための条件を，a，b，x，y，z のうち必要なものを用いて表せ。

2. 物理学で用いられる近似式について，以下の問いに答えよ。

a. 外力のポテンシャル $U(x)=K\sin\dfrac{x}{L}$ がある。ここで，K と L は正の定数である。条件 $|x|\ll L$ が満たされる場合について，$U(x)$ を 3 次式 $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ で近似する。このとき，定数係数 α，β，γ，および δ をそれぞれ求めよ。

b. 光のドップラー効果の理論では，関数 $f(u)=\dfrac{c-u}{\sqrt{c^2-u^2}}$ が重要な役割をする。ここで，正の定数 c は真空中の光の速さを表す。条件 $|u|\ll c$ が満たされる場合について，$f(u)$ を 2 次式 $A+Bu+Cu^2$ で近似する。このとき，定数係数 A，B，および C をそれぞれ求めよ。

3. 磁場 $\vec{H}=(H_x,H_y,H_z)$ を次の行列 A で表すことがある。

$$A=\begin{pmatrix}0 & H_z & -H_y\\ -H_z & 0 & H_x\\ H_y & -H_x & 0\end{pmatrix}$$

$H=\sqrt{(H_x)^2+(H_y)^2+(H_z)^2}\neq 0$ の場合について，以下の問いに答えよ。虚数単位を $i=\sqrt{-1}$ とする。なお，必要ならば解答に H を用いて良い。

a. 縦ベクトル $\begin{pmatrix}H_x\\ H_y\\ H_z\end{pmatrix}$ が行列 A の固有ベクトルであることを示せ。

b. 行列 A の固有値をすべて求めよ。