

平成28年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

物理学科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部，解答用紙3枚
3. 問題は全部で3問あります。3問すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

長さ l の質量の無視できる糸でつながれた、ともに質量が m の質点1と質点2が滑らかな机の上に置かれている。糸はたるむことなく、またのびることもないとする。また糸と机との間の摩擦も考えない。図1のように質点2を机の端に持っていき、静かに離れたところ、図2のように鉛直下向きに落下した。図2のように机に沿って水平方向右向きに x 軸を、机の端から鉛直上向きに y 軸をとり、机の端を原点 O とする。質点1と質点2の位置座標をそれぞれ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

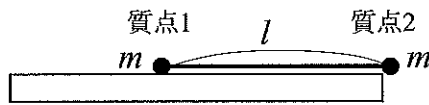


図 1

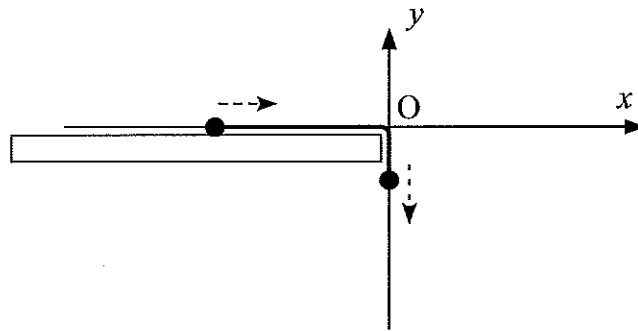


図 2

まず、質点1が机の端に達するまでの運動について考える。質点2を離れたときを $t=0$ とする。

1. 糸の張力の大きさを T として質点1と質点2の運動方程式をそれぞれ書け。
2. 質点1と質点2について、それぞれの位置座標の関係を書け。
3. 糸の張力の大きさ T を求めよ。
4. 質点1が机の端に達した瞬間の、質点1の速さ v_0 を求めよ。

次に、質点1が机から離れた後の、糸でつながれた質点1と質点2からなる質点系の運動について考える。このときこの質点系は剛体として扱えるものとする。以下の問いでは質点1が机の端に達した瞬間を $t=0$ とし、解答に問4の v_0 を用いてよい。

5. $t=0$ での、この質点系の重心の位置座標 (x, y) と速度 (\dot{x}, \dot{y}) を求めよ。
6. この質点系の重心の位置座標を時間 t の関数として求めよ。
7. この質点系の重心のまわりの慣性モーメント I_0 を求めよ。
8. $t=0$ での、この質点系の重心まわりの角運動量の大きさを求めよ。

II.

1. 図1のように真空中の無限に長い直線L上に一様な線密度 λ で電荷が分布しているとき、そこから距離 r の点Pにおける電場について以下の問いに答えよ。ただし真空の誘電率を ϵ_0 とする。

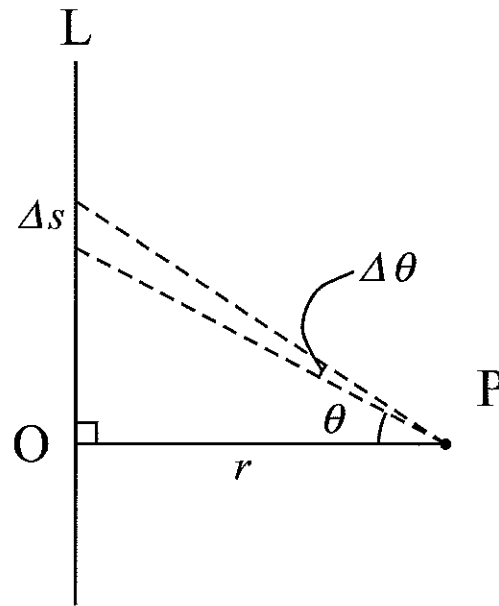


図1

- L上の長さ Δs の微小区間について考える。PからLへおろした垂線とPから微小区間へ結んだ線分がなす角を θ とすると、微小区間にある電荷がPにつくる電場の大きさを求めよ。
- Δs を θ の微小量 $\Delta\theta$ で表せ。ただし、 $\Delta\theta$ の二次より高次の項は0と近似してよいとする。
- 微小区間がつくる電場を直線全体について積分し、Pにおける電場のLに対して垂直な成分と平行な成分をそれぞれ求めよ。

この問題を図2のようなLを中心軸とした半径 r 、高さ h の円柱状の閉曲面Sにおけるガウスの法則を用いて考える。

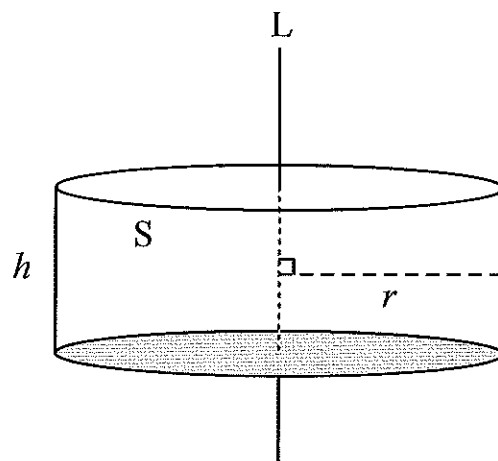


図2

- d. Lから距離 r の点での電場の向きを示せ。
 e. Lから距離 r の点での電場の大きさを $E(r)$ とするとき、S上における電場の面積分

$$\int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS$$

を求めよ。ここで、 \vec{n} はSの法線ベクトルである。

- f. Sに囲まれた領域内にある電荷の総和を求めよ。
 g. 問d, eの結果を用いて $E(r)$ を求めよ。

2. 静電ポテンシャル $\phi(x, y, z)$ が以下のように表されるときを考える。

$$\phi(x, y, z) = k \log(r) + C, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (k, C \text{ は定数})$$

以下の問いに答えよ。

- a. 上に示した $\phi(x, y, z)$ の式を用いて電場が $\vec{E} = \left(-\frac{kx}{r^2}, -\frac{ky}{r^2}, 0\right)$ となることを示せ。
 b. \vec{E} の回転 $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ を求めよ。
 c. z 軸上($x = y = 0$)以外の点で、 \vec{E} の発散 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ を求めよ。

III.

1. 三角関数に関する以下の問いに答えよ。

a. e^x , $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開せよ。

b. オイラーの関係式,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

が成り立つことを, 問 a のテイラー展開の結果を用いて示せ。

c. 任意の正の整数 n について, 次の恒等式が成り立つことを示せ。

$$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$$

d. 問 c の恒等式を用いて, 以下の式を証明せよ。

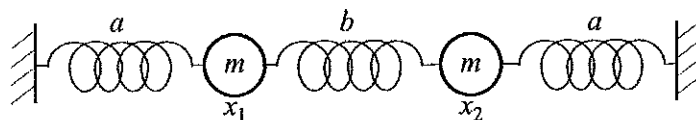
$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$\sin(3\theta) = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$$

2. 図のように質量 m の2つのおもりが、3つのバネでつながれて直線上を運動している。



おもりのつり合いの位置からのずれ x_1, x_2 は、次のような運動方程式にしたがっている。ただし、 a と b はバネ定数である。

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -ax_1 + b(x_2 - x_1), \quad m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -ax_2 - b(x_2 - x_1)$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ として、上の運動方程式を行列の形で書くと、

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv K \vec{x},$$

$$K = \begin{pmatrix} -a-b & b \\ b & -a-b \end{pmatrix}$$

となる。この連立微分方程式を行列 K を対角化することによって解きたい。以下の問いに答えよ。

- $K\vec{u} = \lambda\vec{u}$ を満たす、 K の固有値 λ と規格化された固有ベクトル \vec{u} を求めよ。
- 問 a で得られた2つの固有ベクトルの内積がゼロであることを示せ。
- 固有値を λ_1, λ_2 として、 $VKV^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となるような 2×2 行列 V を、問 a で得られた固有ベクトル \vec{u} から構成せよ。
- $V\vec{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと、運動方程式が、 $m \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \lambda_i y_i$ ($i = 1, 2$) になることを示せ。
- y_1 と y_2 の運動方程式の一般解を求め、さらに、おもりの位置 x_1, x_2 の一般解を求めよ。 $(\lambda_1, \lambda_2$ ではなく、 a, b を用いよ。)