平成 30 年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物　理　学　科

筆記試験問題（物理学）

注意事項

1．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

2．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

3．問題は全部で３題あります。各解答用紙に受験番号を記入してください。

4．解答時間は，１２０分です。途中で退席することはできません。

5．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. 水平方向に x 軸，鉛直上方向に y 軸をとる。原点から仰角 θ の方向に初速 v で打ち上げた質点の軌跡を表す式を求めよ。重力加速度の大きさを g とする。

2. 図のように半径 r の円状のループを持つなめらかなレールがある。点 A に置かれた質量 m の質点が，レールの斜面に沿って静かに滑り出し，点 B を速さ v_B で通過する。ループの中心を O，頂点を C とし，OB から測った角度を θ とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

   a. 質点がループ上の角度 θ の位置にきたときの速さを v，そのとき質点がレールから受ける垂直抗力の大きさを N とする。質点の運動方程式の動径方向成分を書け。

   b. 質点がループ上にあるとき，地面からの高さを y，質点の速さを v として，質点がループから受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

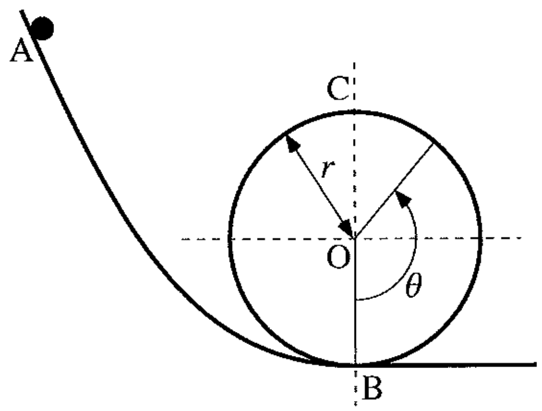
   c. 点 B における速さが $v_B \leqq v_1$ のとき質点はループ上で逆戻りをする。v_1 を求めよ。

   d. 質点が点 C を通過しループを一周するためには $v_B \geqq v_2$ である必要がある。v_2 を求めよ。

   e. $v_B \geqq v_2$ のための，点 A の高さについての条件を示せ。

   f. $v_1 < v_B < v_2$ のとき，質点は角度 θ_3 でレールを外れた。このときの $\cos\theta_3$ と質点の速さを v_B，r，g を用いて表せ。

   g. 問 f のあと，質点はどのような運動をするか，簡潔に述べよ。



図

II.

1. 以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率を ε_0 とする。

   a. 面積 S の 2 枚の極板を真空中で距離 d だけ隔てた平行板コンデンサーの両極に，それぞれ $+Q$，$-Q$ の電荷を与えた。極板間に生じる電場の強さ E および極板間の電位差 V を求めよ。ただし，極板の端での電場の乱れは無視でき，極板間の電場は一様とみなせるものとする。

   b. 周波数 f の交流電流 $I(t) = I_0 \sin(2\pi f t)$ を，抵抗値 R の抵抗に流したときの仕事率 P を求め，1 周期の間の平均仕事率 $\overline{P}$ を計算せよ。

   c. 座標軸の原点 O に，大きさが p，向きが z 軸の正方向である電気双極子モーメントがある。このとき，原点から距離 r だけ離れた点 $\mathrm{R}(x, y, z)$ における電位は，

   $$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3}$$

   で与えられる。この電気双極子モーメントによる電場 $\vec{E}(x, y, z)$ を求めよ。

   d. 磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ はベクトル・ポテンシャル $\vec{A}(\vec{r})$ を用いて $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ と表される。ストークスの定理を用いて，磁場中で閉じた経路 C に沿った $\vec{A}(\vec{r})$ の線積分を $\vec{B}(\vec{r})$ を含んだ式へ書き換えよ。また，その式が物理的に何を表しているかを簡潔に説明せよ。

2. 電荷 q，質量 m の粒子が，一様な磁場 $\vec{B}$ のもとで運動する場合について調べる。磁場を z 軸方向 $\vec{B} = (0, 0, B)$ にとり，粒子の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

   a. 粒子が受けるローレンツ力 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求めよ。

   b. x 方向と y 方向のそれぞれについて粒子の運動方程式を書け。

   c. 時刻 $t = 0$ に初速 v_0 で粒子が入射した。この入射した点を原点 O とし，入射方向を y 軸正の向きとする。このとき，時刻 t における粒子の速度について v_x，v_y をそれぞれ求めよ。

   d. 時刻 t における粒子の xy 平面内の座標 (x, y) を求めよ。また，粒子の軌跡を図示せよ。

III.

1. ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r}) = \dfrac{A\vec{r}}{r^3}$ が存在する。ここで A は定数であり，$\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ で，$r = |\vec{r}|$ である。$r \neq 0$ として以下のものを計算せよ。計算過程も書くこと。

   a. $\mathrm{div}\ \vec{V}(\vec{r})$

   b. $\mathrm{rot}\ \vec{V}(\vec{r})$

2. 原点を中心として球対称な密度分布 $\rho(r) = B(1 - \dfrac{r}{R})$ が存在する。ここで r は原点からの距離である。ただし，B は定数で，$R < r$ では $\rho(r) = 0$ である。

   a. 半径 $r + \Delta r$ の球面と半径 r の球面に挟まれた領域の体積 ΔV を求めよ。

   b. $\dfrac{\Delta r}{r} \ll 1$ とすると，近似的に ΔV は Δr に比例し，$\Delta V = f(r)\Delta r$ と書ける。$f(r)$ を求めよ。

   c. ΔV の領域内の質量は $\rho(r)\Delta V = f(r)\rho(r)\Delta r$ となることから，半径 r の球面より内側に含まれる質量 $M(r)$ は，$M(r) = \displaystyle\int_0^r f(r')\rho(r')dr'$ となる。$r \leqq R$ に対して，$M(r)$ を求めよ。

   d. 密度分布が球対称である場合には，r の位置にある質点が受ける単位質量あたりの重力の大きさ F_G は $F_G(r) = \dfrac{GM(r)}{r^2}$ となる。$r \leqq R$ と $R < r$ のそれぞれについて，$F_G(r)$ を求めよ。

   e. 横軸を r，縦軸を $F_G(r)$ とするグラフの概形を描け。

3. 次のような行列 C について考える。ここで $i^2 = -1$ である。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

   a. 行列 C の固有値をすべて求めよ。

   b. 行列 C の固有ベクトルをすべて求めよ。ただし，固有ベクトルは大きさ 1 に規格化すること。

   c. 行列 C を対角化した行列を D とする。行列 D を求めよ。

   d. D^n を計算し，C^n を求めよ。