令和４年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物理学プログラム

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

３．問題は全部で３題あります。３題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は，１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

図1のように，水平な床の上に，半径a，質量Mの一様な円柱が静止している。床と円柱の間の動摩擦係数はμである。時刻$t=0$に，円柱の重心を通り中心軸に垂直かつ水平方向に力積の大きさAの撃力を加えた。重力加速度の大きさをgとして，以下の問いに答えよ。ただし，撃力の向きにx軸をとり，$t=0$における重心の位置を$x=0$とする。また，円柱の中心軸周りの回転角をφととり，$t=0$のとき$\varphi=0$とする。

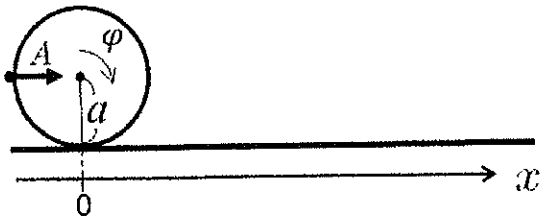

図 1

1. 円柱が運動を始めた直後の，重心運動の速さv_0を求めよ。なお，以降ではv_0を用いて解答してよい。

2. この円柱の中心軸周りの慣性モーメントが$\frac{1}{2}\,M\,a^2$であることを導出せよ。

3. 運動開始後，摩擦力による力のモーメントによって円柱は回転を始めるが，ある時刻Tまでは，円柱は床の上を滑りながら回転運動する。$0<t\leq T$におけるxとφに対する運動方程式を書け。

4. 問3の運動方程式を積分し，$0<t\leq T$において$\frac{dx}{dt}$および$\frac{d\varphi}{dt}$を求めよ。

5. 時刻T以降は，円柱は床の上を滑らずに回転運動する。Tを求めよ。

6. $T\leq t$における，円柱の重心運動と回転運動のエネルギーの和を計算し，それが運動を始めた直後の重心運動のエネルギーの何倍かを求めよ。

II.

1. 図1のように，直方体の導体中を電子が x 軸の正の向きに速さ v で運動している。電子の電荷を $-e$，導体中の電子の数密度を n として，以下の問いに答えよ。ただし，導体は x 方向には十分長いとする。

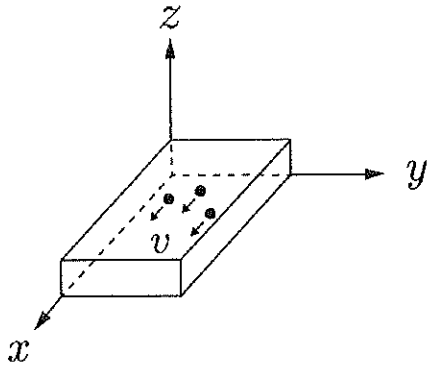

図1

a. 導体中を流れる電流密度の大きさ i を v，e，n のうち必要なものを用いて表し，電流の向きを答えよ。

b. z 軸の正の向きに磁束密度の大きさが B の一様な磁場をかけた。このとき，1つの電子にはたらく力の大きさを v，e，n，B のうち必要なものを用いて表し，その力の向きを答えよ。

c. 問bの磁場をかけて十分時間がたったとき，y 軸方向には電流は流れなくなる。その理由を「ローレンツ力」と「釣り合い」という言葉を使って説明せよ。

d. 問cのとき，導体内の y 軸方向に生じる電場の大きさを i，e，n，B を使って表せ。

2. 図2のように，真空中に半径 a の円形回路があり，大きさ I の定常電流が流れている。円の中心Oを通り，円形回路と垂直な方向を z 軸とする。真空の透磁率 (磁気定数) を μ_0 として，以下の問いに答えよ。

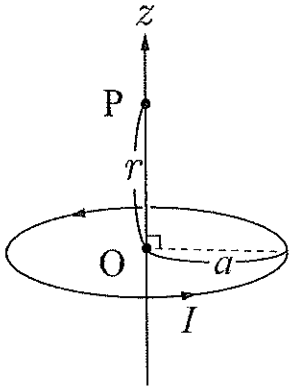

図 2

a. 円形回路が中心Oに作る磁束密度の大きさを答えよ。

b. 円形回路が z 軸上の点Pに作る磁束密度の大きさ $B(r)$ が

$$B(r) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

となることを説明せよ。ただし，r は中心Oから点Pまでの距離である。

c. 図2の円形回路を多数接続し，$z = -L/2$ から $z = L/2$ まで単位長さあたりの巻き数 n のソレノイドコイルを作った。このソレノイドコイルに大きさ I の電流を流したとき，中心Oに作られる磁束密度の大きさを求めよ。

問cのソレノイドコイルの長さ L を無限大にすると，ソレノイドコイル内の磁束密度は場所によらず一定になる。次の問いに答えよ。

d. このときの磁束密度の大きさをアンペールの法則を用いて求めよ。

III.

虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ を含む指数関数 $e^{i\theta}$ を三角関数で表す公式はオイラーの公式と呼ばれる。物理の問題を扱うには，よく似た行列の関係式を用いると便利なことが多い。このことに関連した以下の問いに答えよ。

1. オイラーの公式を書け。つまり，実数 θ に対して $e^{i\theta}$ を三角関数を用いて表せ。

2. 二次正方行列 I および J を

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ,\quad J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

で定義する。J^2 を計算し，J^2 と I の間に成り立つ関係式を求めよ。

3. 一般に二次正方行列 X に対し，そのゼロ乗 X^0 および指数関数 e^X は次式で定義される:

$$X^0 = I\ ,\qquad e^X = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$$

問 2 の関係式に着目すると，行列 $e^{\theta J}$ は I に比例する部分と J に比例する部分の和

$$e^{\theta J} = f(\theta)\,I + g(\theta)\,J$$

で表すことができる。このとき，関数 $f(\theta)$ および $g(\theta)$ を求めよ。

なお，必要ならば，三角関数のベキ展開（テイラー・マクローリン展開）が次式で与えられることを用いてもよい:

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,\theta^{2n} = 1-\frac{1}{2!}\theta^2+\cdots$$
$$\sin\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,\theta^{2n+1} = \theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\cdots$$

4. 問 3 で求めた行列 $e^{\theta J}$ に対して，その行列式の値を答えよ。

次に，これまでの結果の応用として，調和振動子の運動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解 $x(t)$ を求めたい。ここで ω は正の定数である。以下の問いに答えよ。

5. 変数 $p(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ および $q(t) = \omega x(t)$ を用いると，この微分方程式は，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix}$$

の形に表すことができる。ここで K は t に依らない二次正方行列である。行列 K を答えよ。

6. 問 5 の微分方程式の解は次式で与えられる:

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = e^{Kt} \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix}$$

以上のことから，初期条件 $p(0) = p_0$，$q(0) = q_0$ に対応する解 $x(t)$ を求めよ。