

令和5年度

新潟大学理学部第3年次編入学試験

物理学プログラム

筆記試験問題（物理学）

注意事項

1. 開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。
2. 試験開始後、次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子1部、解答用紙3枚
3. 問題は全部で3題あります。3題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
4. 解答時間は、120分です。途中で退席することはできません。
5. 試験終了後、問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. ばねの一端を固定し，他端に質量 m の小球をつなぎ，水平でなめらかな床面上で小球を運動させる。ばねが自然長のときの小球の位置を原点 O として，ばねが伸びる向きを x 軸の正の向きにとる。ばねを引き伸ばして離れたところ小球は角振動数 ω で単振動をした。以下の問いに答えよ。

a. 小球が位置 x においてばねから受ける力の大きさを書け。

次に，この小球に $-2m\gamma\frac{dx}{dt}$ の抵抗力がはたらく場合を考える。ここで， γ は正の定数である。

b. この場合の運動方程式を書け。

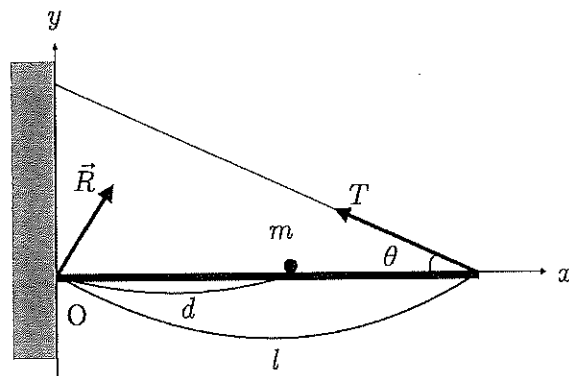
c. 小球の力学的エネルギーの時間変化率 $\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right]$ が抵抗力による仕事率と等しいことを示せ。

d. $x(t) = e^{\alpha t}$ と仮定したとき，問 b. の運動方程式を満たす α を求めよ。

e. 抵抗が小さく $\omega > \gamma$ の場合，初期条件として $t = 0$ での小球の位置が $x_0 (x_0 > 0)$ ，速度が 0 であるとき，問 b. の運動方程式の解 $x(t)$ を求め，その概形を図示せよ。必要であればオイラーの公式 $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ を用いてよい。ただし， i は虚数単位である。

2. 水平方向を x 軸，鉛直上方を y 軸としてその平面内の力の釣り合いを考える。図のように，台の一端をちょうつがいによって原点 O において壁に留め，もう一端をひもで上方の壁とつなげた。質量 m の質点を乗せたところ，ひもが角度 θ で張った状態で台は水平に静止した。

原点 O から質点までの距離を d ，台の長さを l ，ひもの張力の大きさを T ，台に対する壁からの抗力を $\vec{R} = (R_x, R_y)$ ，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。ただし，台とひもの質量は無視でき，ちょうつがいは上下に自由に回転できるとする。



図

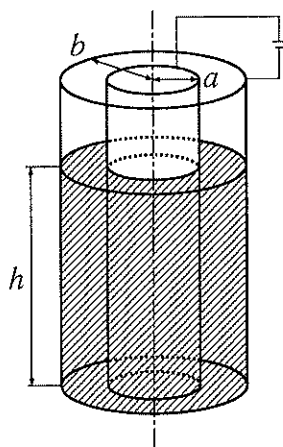
- 質点にはたらく重力による原点 O 周りの力のモーメントの大きさを求めよ。
- 原点 O 周りの力のモーメントの釣り合いの式から張力 T を求めよ。
- $\vec{R}$ の各成分 (R_x, R_y) を g, m, d, l, θ のうち必要なものを用いてそれぞれ表せ。
- $\vec{R}$ の向きが水平方向に対して 45° となったとき， $\tan \theta$ の満たす条件を求めよ。
- 問 d. の条件が満たされているとき， $\theta = 30^\circ$ となるための質点の位置を求めよ。

II.

1. 以下の問いに答えよ。ただし、真空の誘電率（電気定数）を ϵ_0 とせよ。
 - a. 点電荷 q が距離 r の位置に作る電場の大きさを答えよ。
 - b. 半径 R の円周上に電荷が一様に分布しており、全電荷は $Q (Q > 0)$ である。この円の中心を原点として、円を垂直に貫く方向に z 軸をとる。原点からの距離が z である z 軸上の点での電場の大きさと向きを求めよ。
 - c. 半径 R の絶縁体の薄い円板上に、電荷が面密度 σ で一様に分布している。この円板の中心を原点として、円板を垂直に貫く方向に z 軸をとる。原点からの距離が z である z 軸上の点での電場の大きさを求めよ。
 - d. 電荷が面密度 σ で一様に分布した無限に広い平面がある。このとき、平面から距離 r の点における電場の大きさをガウスの法則を用いて求めよ。

2. 電解質溶液で長さ L 、断面積 S の円筒容器を満たし、円筒の両端を電極として電気抵抗を測定すると、その大きさは $\rho \frac{L}{S}$ であった。ここで、 ρ は電解質溶液によって決まる定数である。

図のような内径 a 、外径 b の同軸円筒状の金属製容器の高さ h までを、この電解質溶液で満たし、この容器の内外の側面を正負の電極にして、電流 I を流した。以下の問いに答えよ。ただし、容器の底面は絶縁体とする。



図

- 容器の中心軸からの距離を r とする。 $a < r < b$ であるような距離 r における電流密度の大きさ $i(r)$ を求めよ。
- 容器の中心軸からの距離が r の位置での電場の強さを、 $i(r)$ を用いて答えよ。
- 内外の電極間の電気抵抗を求めよ。

III.

以下のような偏微分方程式を満たす、 $\log r$ のような関数は、物理学の問題を解く際にしばしば現れ、重要な役割を果たす。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log r = 2\pi \delta(x) \delta(y) \quad (1)$$

ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ は xy 平面上での原点からの距離で、 $\log$ は自然対数である。また、 $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数であり、 $x \neq 0$ で $\delta(x) = 0$ 、 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ という性質を持つ。

1. 式 (1) の偏微分方程式が成り立つことを示すために、 $r \neq 0$ と $r = 0$ の場合に分けて考える。以下の問いに答えよ。

- a. $r \neq 0$ のとき、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log r = 0$$

であることを示せ。

- b. 原点 ($r = 0$) を中心とした微小な半径 ϵ の円内の領域 R で面積分をしたとき、

$$\iint_R \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \log r \right] dx dy = 2\pi$$

となることを示せ。このとき、平面におけるグリーンの定理

$$\iint_R \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (A dx + B dy)$$

を用いてもよい。 $\oint_C$ は領域 R の境界線 C に沿った反時計回りの線積分である。

また、 A と B は (x, y) の関数である。

2. 電荷を帯びた2つの物体を配置したところ、電位 $\phi(x, y, z)$ が

$$\phi(x, y, z) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[\log \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} - \log \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2} \right]$$

となった。ここで、 λ と a は正の実数、 ϵ_0 は真空の誘電率（電気定数）である。以下の問いに答えよ。

a. x, y, z に比べて a は非常に小さいとして、 $\phi(x, y, z)$ の近似式を a について1次までの精度で求めよ。必要であれば、テイラー展開の公式

$$f(x+a) = f(x) + \frac{df}{dx}(x) a + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2}(x) a^2 + \dots$$

を用いてもよい。ただし、 $a \ll x$ であり、関数 $f(x)$ は必要な階数だけ微分可能とする。

b. 電荷密度 $\rho(x, y, z)$ のもとでのガウスの法則

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

と比較して、電荷を帯びた2つの物体はどのような形をしていて、どこに配置されているか答えよ。

3. 次の行列 $M(z)$ についての問いに答えよ。

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. z を複素数として、行列 $M(z)$ の行列式が $\det M(z_0) = 0$ となる複素数 z_0 をすべて答えよ。

b. 複素数 z の実部を x 、虚部を y として、

$$\Omega = -\log |\det M(z)|$$

の勾配 $\vec{\nabla} \Omega(x, y) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)$ の、原点 $(x, y) = (0, 0)$ での値を求めよ。