令和６年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物理学プログラム

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

３．問題は全部で３題あります。３題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。
問題ごとに解答用紙があります。
解答は指定された解答用紙に記入してください。

４．解答時間は，１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

1. 水平面と傾斜角 θ をなす斜面がある。図1のように，斜面上に半径 R で質量 M の一様な円柱を静かに置くと，滑らずに斜面に沿って転がった。円柱が斜面に接する場所で，円柱にはたらく摩擦力の大きさを F とする。また，円柱の重心運動の速さが v のとき，中心軸周りの角速度の大きさは ω である。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

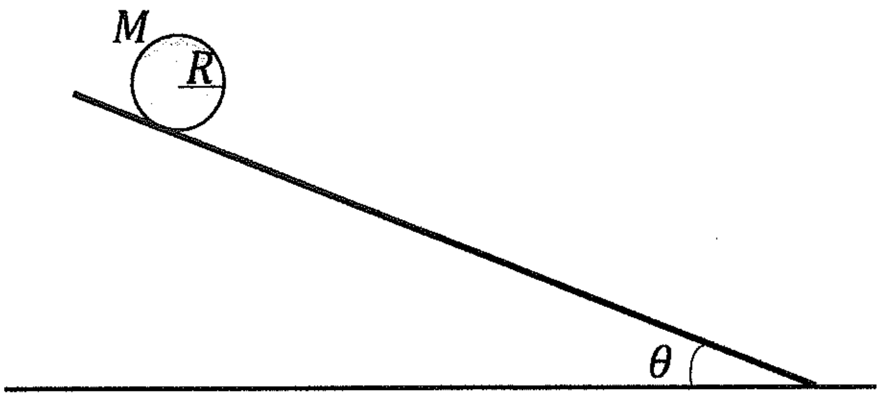

図1

a. 円柱の重心運動に対する運動方程式を書け。

b. 円柱の中心軸周りの慣性モーメントが $\dfrac{1}{2}MR^2$ であることを導出せよ。

c. 円柱の回転運動に対する運動方程式を書け。

d. 円柱が滑らずに転がるとき，v と ω の間の関係式を書け。

e. 円柱にはたらく摩擦力の大きさ F を M，g，θ を用いて表せ。

f. 円柱の重心が最初に置いた位置から斜面に沿って距離 d だけ進んだとき，重心運動の速さを g，d，θ を用いて表せ。

2. 図2のように，原点Oに質量 M の質点を固定し，重力が無視できるほど十分遠方から質量 m ($m \ll M$) の質点を速さ v で入射させる。質量 m の質点の位置ベクトル $\vec{r}$ に対し，$r \equiv |\vec{r}|$ とする。もし，質量 m の質点に力がはたらかなければ，破線に沿って運動し，r の最小値は b となる。しかし，質量 M の質点から重力がはたらくため，r の実際の最小値 r_0 は，$r_0 < b$ となる。重力定数を G として，以下の問いに答えよ。

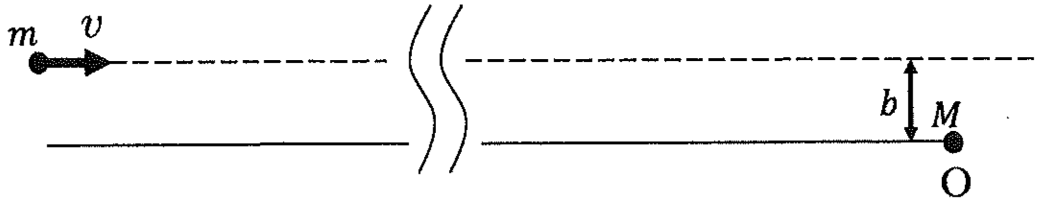

図2

a. $r = r_0$ のとき，質量 m の質点の運動エネルギーを求めよ。

b. 質量 m の質点の点Oまわりの角運動量が保存することを証明せよ。

c. r が最小となるときには $\dfrac{dr}{dt} = 0$ であることに留意して，$r = r_0$ のときの質量 m の質点の速さ v_0 を v，b，r_0 を用いて表せ。

d. G，M，b，v を用いて r_0 を表せ。

II.

1. 図1のように，半径 a の無限に長い2本の円柱導体A，Bが中心軸間距離 d を隔てて平行に置かれており，導体A，Bそれぞれに単位長さあたりの電荷量 $+\lambda$ と $-\lambda$ ($\lambda > 0$) が与えられている。半径 a に対して距離 d が十分に大きいとき，互いの電荷分布への影響は無視でき，導体表面上の電荷は一様に分布しているとみなせる。ここで，導体A，Bの間に点Pをとり，導体Aの中心軸上の原点Oからの距離を x ($a < x < d - a$) とする。真空の誘電率を ε_0 とするとき，以下の問いに答えよ。解答にあたっては，計算の過程も簡潔に示すこと。

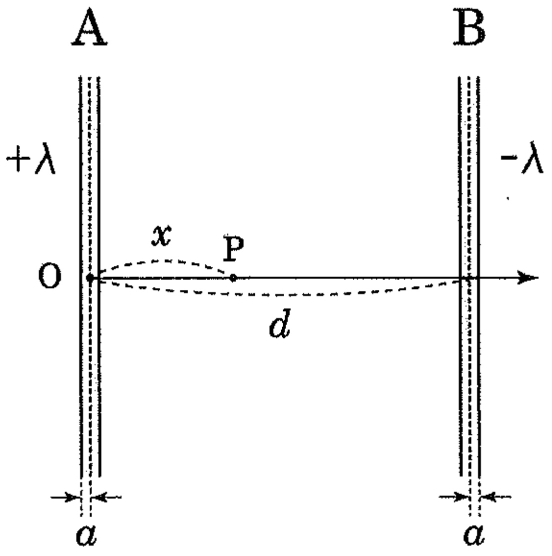

図1

a. 導体Aに分布する電荷が点Pに形成する電場の大きさを E^+ とするとき，$E^+ = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$ と表されることをガウスの法則を用いて導出せよ。

b. 点Pにおける電場の大きさを求めよ。

c. 導体A，B間の電位差を求めよ。

d. 単位長さあたりの静電容量を求めよ。

e. 導体A，B間にはたらく力について，単位長さあたりの力の大きさを求めよ。

2. 図2のように，抵抗値$4R$の抵抗R_1，R_4と抵抗値Rの抵抗R_2，R_3，および起電力E_1の電池がブリッジ回路を形成しており，さらにAC間に起電力E_2の電池が接続されている。また，BD間とAC間にはそれぞれスイッチS1とS2が設けられており，初期状態ではどちらも開放されている。電池の内部抵抗は無視できるものとして，以下の問いに答えよ。

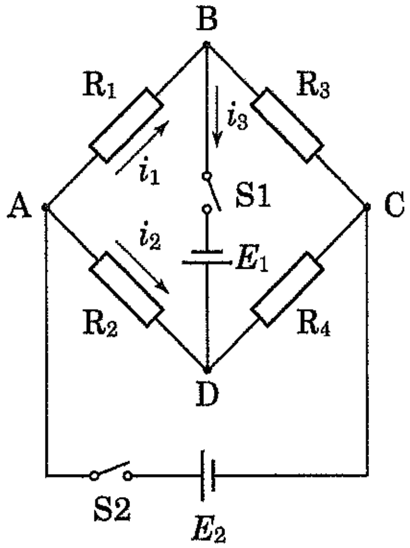

図2

a. スイッチS1を閉じたとき，BD間に流れる電流の大きさを求めよ。

次に，スイッチS1とS2を閉じた状態を考える。ABの向き，ADの向きおよびBDの向きに流れる電流をそれぞれi_1，i_2およびi_3とする。

b. 抵抗R_1，R_3と起電力E_2の電池を含む閉回路ABCAについて，電池の起電力，電流および抵抗値の関係を書け。

c. 抵抗R_3，R_4と起電力E_1の電池を含む閉回路BCDBについて，電池の起電力，電流および抵抗値の関係を書け。

d. 電流i_3をR，E_1，E_2を用いて表せ。また，$E_2 = 2E_1$の関係があるとき，BD間に流れる電流の向きを答えよ。

III.

1. 力の場 $\vec{F}(\vec{r}) = (-ax + by + cz,\ bx - ay + cz,\ cx + by - az)$ を考える。ただし, a, b, c は正の定数, $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$ は位置ベクトルである。以下の問いに答えよ。

    a. $\vec{F}(\vec{r})$ の発散 $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ を求めよ。

    b. $\vec{F}(\vec{r})$ の回転 $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$ を求めよ。

    c. $\vec{F}(\vec{r})$ が保存力になるための条件を a, b, c のうち必要なものを用いて表せ。

2. 以下の問いに答えよ。

    a. 微分方程式 $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - k^2y(x) = 0$ の一般解を書け。ただし, k は正の定数である。

    b. 微分方程式 $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} - 2x\dfrac{dy(x)}{dx} + 4y(x) = 0$ が $y(x) = ax^2 + bx + c$ を解に持つ場合を考える。ただし, a, b, c は実定数である。$y(1) = 2$ のとき, a, b, c をそれぞれ求めよ。

3. 以下の問いに答えよ。

    a. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta - i\sin\theta \\ \cos\theta + i\sin\theta & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。ただし, θ は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である。

    b. 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値をすべて求めよ。