令和８年度

新潟大学理学部第３年次編入学試験

物理学プログラム

筆記試験問題（物理学）

注意事項

１．開始の合図があるまでこの冊子を開いてはいけません。

２．試験開始後，次のものが配布されているか確認してください。
問題冊子１部，解答用紙３枚

３．問題は全部で３題あります。３題すべて解答してください。
各解答用紙に受験番号を記入してください。

４．解答時間は，１２０分です。途中で退席することはできません。

５．試験終了後，問題冊子は各自持ち帰ってください。

I.

ばね定数 k のばねにつながれた小球について，その1次元的な運動を考える。

1. 図に示すように，質量 m の小球が，固定された壁にばねによって連結されている。時刻 t におけるばねの自然長からの変位を $x(t)$ とする。小球には速度に比例する抵抗力が働くとして，運動方程式は次式で与えられる。

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\gamma\frac{dx(t)}{dt} - kx(t) \tag{1}$$

ただし，γ は $0 < \gamma < 2\sqrt{km}$ を満たす定数とする。ネイピア数を e，虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ として，以下の問いに答えよ。

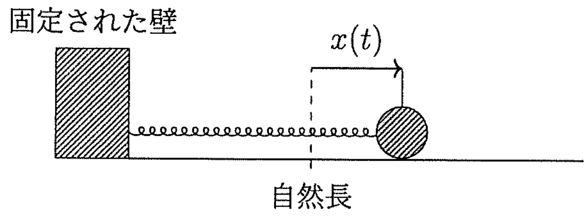
a. 小球の力学的エネルギー $E(t)$ を次の式で定義する。

$$E(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2$$

力学的エネルギーの時間微分 $\frac{dE(t)}{dt}$ を計算し，$\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$ となることを示せ。

b. $x(t) = Ae^{-at}\cos(bt+\theta)$ とする。このとき，$\frac{dx(t)}{dt}$ と $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ を求めよ。ただし，a, b, A, θ を0でない実定数とする。

c. 問bの $x(t) = Ae^{-at}\cos(bt+\theta)$ が運動方程式(1)の解になることを用いて，定数 a, b を求めよ。ただし，$b > 0$ としてよい。



図

2. 問 1 のばねにつながれた小球に，時間に依存する外力 $f(t) = f_0 \cos \omega_0 t$ を加えたときを考える。ただし，f_0, ω_0 は実定数とする。このとき，運動方程式は次式で与えられる。

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\gamma \frac{dx(t)}{dt} - kx(t) + f_0 \cos \omega_0 t \tag{2}$$

以下の問いに答えよ。

a. 運動方程式 (2) の特殊解 (特解) を $x_s(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ と表す。このとき，実定数 c_1, c_2 を求めよ。

b. 運動方程式 (2) の一般解を書け。

c. 十分に長い時間 $(t \gg m/\gamma)$ が経過した後の一般解 $x(t)$ は，$x(t) \approx x_s(t)$ と特殊解 (特解) $x_s(t)$ で近似することができる。この理由を簡単に説明せよ。

d. 問 c のとき，外力がする平均の仕事率 P を求めよ。ただし，近似された解 $x_s(t)$ について，周期 $T = 2\pi/\omega_0$ として，平均の仕事率 P を次式で定義する。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dx_s(t)}{dt} f_0 \cos \omega_0 t \, dt$$

II.

1. 以下の問いに答えよ。ただし，真空の誘電率（電気定数）を ε_0 とせよ。

   a. 真空中におかれた半径 R の導体球がある。この導体球を無限遠を基準として電位 V まで帯電させたとき，導体球が持つ電荷量 Q を求めよ。

   b. 電荷 Q に帯電した半径 R の導体球が持つ静電エネルギー U を求めよ。

   c. 平行板コンデンサーの極板間に，厚さがそれぞれ d_1, d_2 で誘電率がそれぞれ ε_1, ε_2 である 2 種類の平行な誘電体層が挿入されている。このコンデンサー全体の合成静電容量 C を求めよ。ただし，このコンデンサーの断面積を A, 極板間の距離を $d_1 + d_2$ とする。

   d. 内部導体の半径が a, 外部導体の半径が b の無限に長い同軸円筒コンデンサーがある。このコンデンサーの内部導体に単位長さあたり $+Q$, 外部導体に単位長さあたり $-Q$ の電荷を与えたときの内部導体と外部導体の電位差 V を求めよ。ただし，内部導体，外部導体の半径方向の厚さは無視できるとする。

2. 以下の問いに答えよ。ただし，真空の透磁率を μ_0 とせよ。

半径 a の無限に長い円柱状の導体がある。この導体に一様な電流密度で合計 I の電流が円柱の軸方向に流れている。このとき，以下の問 a,b に答えよ。

a. 導体の中心軸から距離 r $(0 < r < a)$ の導体内部の点における磁束密度の大きさ B を求めよ。

b. 導体の中心軸から距離 r $(r > a)$ の導体外部の点における磁束密度の大きさ B を求めよ。

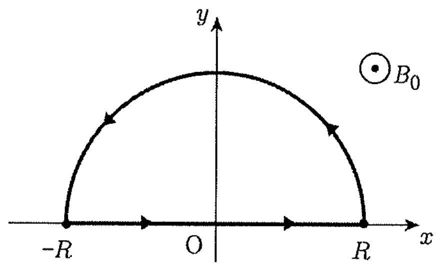
半径 R の閉じた円形導線に大きさ I の電流が流れている。円形導線の中心を O とし，O を通り円形導線に垂直な直線を z 軸とする。このとき，以下の問 c に答えよ。

c. z 軸上における磁束密度の大きさ B を z の関数として求めよ。ただし，円形導線を含む平面を $z=0$ とし，ビオ・サバールの法則は以下の式で表される。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

ここで，$Id\vec{\ell}$ は電流素片ベクトル，$\vec{r}$ は電流素片を起点とした磁場を求める点への相対位置ベクトルである。

図のように半円と線分が組み合わさった閉じた導線が xy 平面上におかれており，電流 I が反時計回りに流れている。また，空間全体に z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B_0 の一様な磁場がかかっている。このとき，以下の問 d に答えよ。



図

d. 導線の半円部分全体が磁場から受ける力の大きさ F_{arc} と力の向きを求めよ。

Ⅲ.

1. 以下の問いに答えよ。ここで，$\vec{r} = (x, y, z)$ は位置ベクトル，$\vec{s} = (a, b, c)$ は定ベクトルである。

a. $r = |\vec{r}|$ とする。$r \neq 0$ において，r の勾配 $\vec{\nabla} r$ を求めよ。

b. $\vec{A} = (\vec{s} \cdot \vec{r})\,\vec{r}$ とする。$\vec{A}$ の発散 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ を求めよ。

c. $\vec{B} = \vec{s} \times \vec{r}$ とする。$\vec{B}$ の回転 $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ を求めよ。

2. e をネイピア数として，a_n は $e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を満たす定数である。a_2 と a_3 をそれぞれ求めよ。

3. 次の微分方程式の解 $y(x)$ を求めよ。ここで，π は円周率である。

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{1}{16} y(x) = 0, \quad y(-\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y(\pi) = 0$$

4. 以下の問いに答えよ。ここで，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位である。

a. 次の行列 A の行列式を求めよ。ここで，v，w，x および y は実数である。

$$A = \begin{pmatrix} v & x - iy \\ x + iy & w \end{pmatrix}$$

b. 次の行列 B を求めよ。ここで，e はネイピア数，α と β は実数である。

$$B = \begin{pmatrix} e^{-\alpha+i\beta} & 0 \\ 0 & e^{\alpha-i\beta} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} e^{-\alpha-i\beta} & 0 \\ 0 & e^{\alpha+i\beta} \end{pmatrix}$$

c. 行列 B の 2 行 1 列成分の実部と虚部をそれぞれ求めよ。