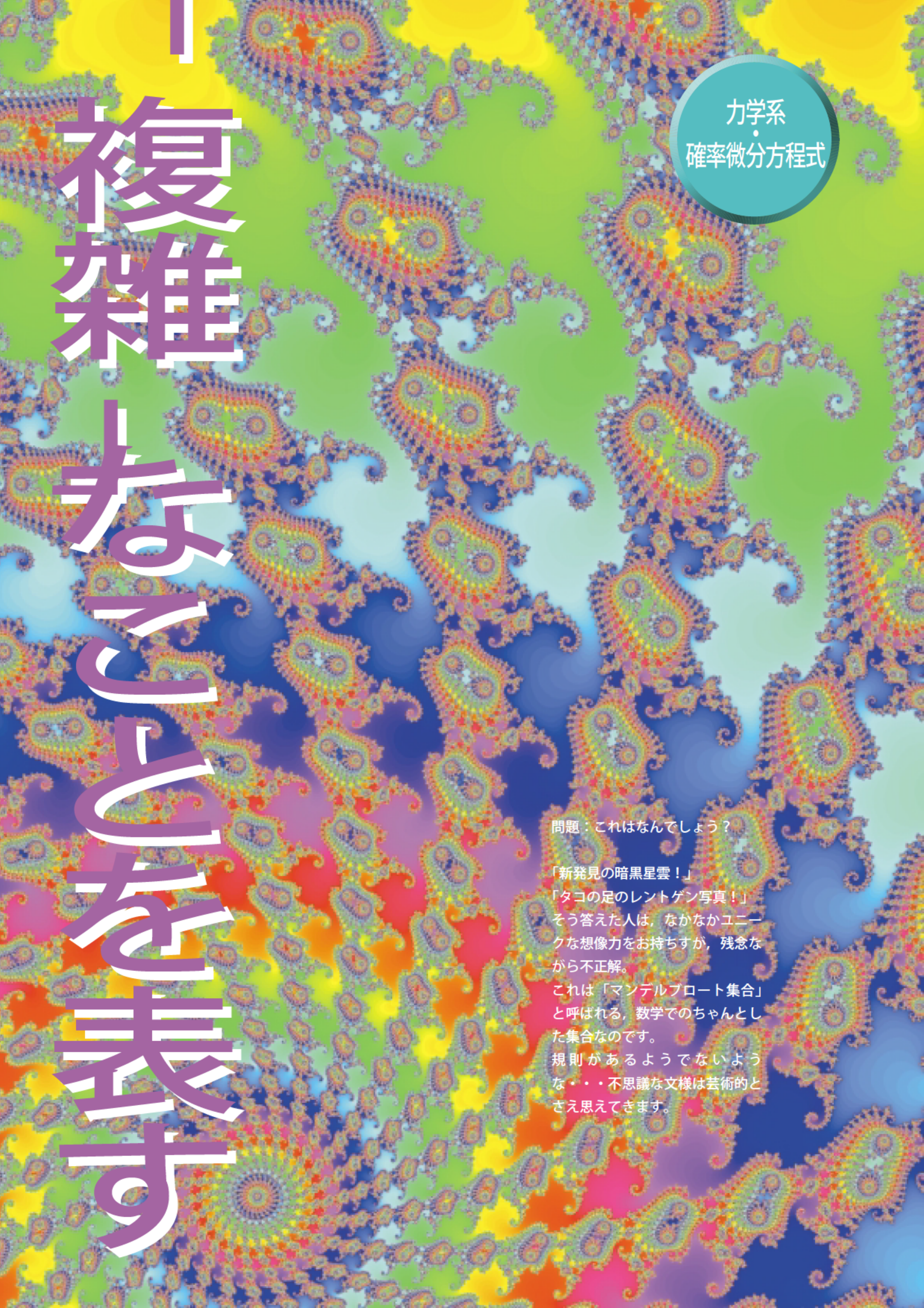
「複雑なことを表す



力学系・確率微分方程式

問題：これはなんでしょう？

「新発見の暗黒星雲！」
「タコの足のレントゲン写真！」
そう答えた人は，なかなかユニークな想像力をお持ちすが，残念ながら不正解。
これは「マンデルブロート集合」と呼ばれる，数学でのちゃんとした集合なのです。
規則があるようでないような・・・不思議な文様は芸術的とさえ思えてきます。

力学系から現れる複雑な図形

いろいろな現象が時間発展するようすを記述する数学的なモデルを力学系とよびます。
その中で，最も有名なのはニュートンの運動方程式です。
力学系のもつ，不思議かつ時として美しい世界の一端をご紹介しましょう。

3体運動

いくつかの天体が重力の下で運動する場合を考えてみましょう。運動方程式は，微分方程式であらわされます。

天体の個数が２個のときは，軌道は円，楕円や双曲線などになり，その様子は完全に理解されています。

一方，天体の個数を３個以上にすると，一般にはその軌道を既知の関数で表現することはできなくなります。

実際，その軌道の長時間にわたる挙動を調べようとしても，わずかな初期値の違いが大きな違いを引き起こすため，大体の様子を予測することさえきわめて困難になります。

３個の天体が，衝突したり無限の彼方に飛び去ってしまわずに永久に運動し続けるかを決定する問題は３体問題と呼ばれています。

$$m_j \frac{d^2\vec{x}_j}{dt^2} = \sum_{j\neq i} G m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\left|\vec{x}_j - \vec{x}_i\right|^3}$$

３体問題の基本方程式

３体問題で，複雑な軌道がうまれるこるメカニズム

ロジスティクス写像

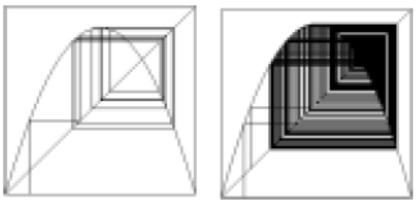
力学系の初期値をわずかに変えただけで，その後の軌道が大きく変わってしまう現象はカオスとも呼ばれています。

カオスは３体問題だけでなく，非常に多くの力学系で起きていています。

その一番簡単な例がロジスティック写像と呼ばれる写像です。

ロジスティック写像の様子はパラメータの値によって，いろいろ変わります。

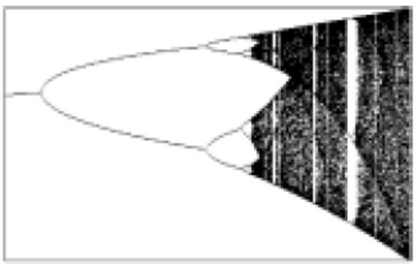
ほとんどの軌道が周期的軌道に引き込まれることもあれば，カオス的な挙動をすることもあります。



ロジスティック写像を何回も合成したときの点の動き

$$x_{\rho+1} = \alpha\, x_\rho(1 - x_\rho)$$

ロジスティック写像　$(1 \le \alpha \le 4)$



aの変化でカオスが生じる様子

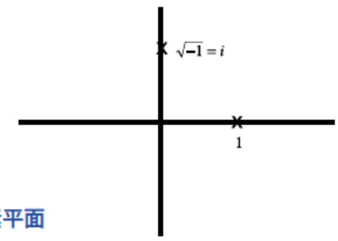
マンデルブロート集合

ロジスティック写像の研究では，数列やパラメータを複素数の範囲まで広げて考えることが重要です。

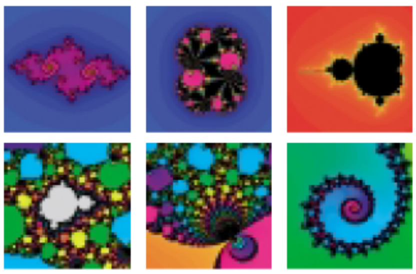
複素数で考えることにより，複素解析に強力な手法が使えるのです。

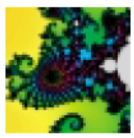
カオス的な挙動をする軌道に対応する初期値の集合はジュリア集合と呼ばれ，ジュリア集合が連結になるパラメータの集合は，マンデルブロート集合と呼ばれます。

これらの集合は，数学的な美しさだけでなくグラフィックとしての美しさも併せ持ち，我々の目を楽しませてくれます。



複素平面





マンデルブロート集合の数々

伊藤解析と数理ファイナンス

数学での発見は，時として数十年，数百年後に社会を動かすことがあります。
たとえば，現代の金融界に不可欠な理論なっている確率微分方程式は，第2次世界大戦中に発表された日本の数学者，伊藤清の論文が発展を遂げた成果なのです。

確率微分方程式

物理学では，微分方程式が理論を記述する基本的な道具でした。

さまざまな科学の分野で，不確実な現象を記述する道具として，1940年代に伊藤清により日本で創られた確率微分方程式が用いられています。確率微分方程式の理論は20世紀後半に大きく発展し，今日では確率解析と呼ばれています。

$$dF(X)=\sum_{i=1}^{d}D_iF(X)dX^i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}D_iD_jF(X)\,d\langle X^i,X^j\rangle$$

確率解析の基礎になる伊藤の公式

ランダムな変数の置換積分の公式です。右辺第２項がふつうの微積分と違っています。伊藤の公式は，数理ファイナンスでも主役を演じます。

金融工学への応用

確率解析の理論が現在もっともよく用いられているのは数理ファイナンス・金融工学の分野です。市場価格が変動するありさまを記述し，ランダムな市場の動きに対して，危険（リスク）の少ない方法を考えるのが金融工学の大事な目的ですが，確率解析はそのために不可欠な理論となっています。

$$-rF+rF_sS_t+F_t+\frac{1}{2}F_{ss}\sigma^2S_t^2=0$$

金融工学で有名なブラックーショールズの方程式

左辺第４項が伊藤の公式の右辺第２項に対応します。

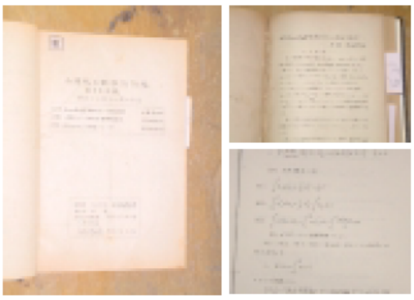
さらに広い分野で

確率論は統計的なデータを処理することを大きな目的としていて，自然科学・社会科学・人文科学など広い範囲で役立てられています。

データを処理するには，それぞれの現象を記述する理論が必要です。

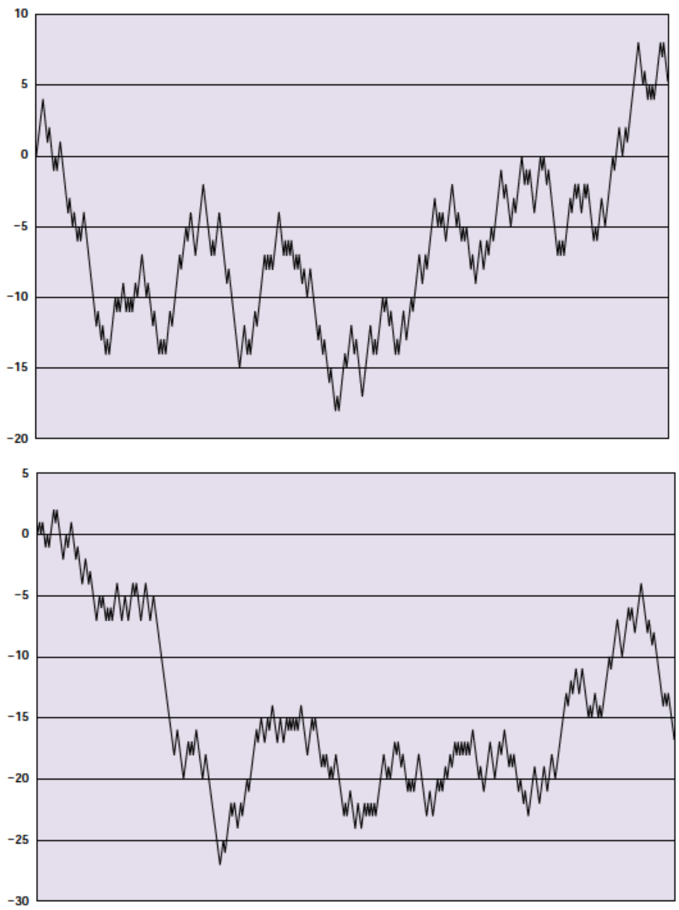
近年，コンピュータ・ＩＴが発達し，大量のデータを高速に処理する事ができるようになりました。そのため，複雑で高度な確率モデルを理論の基礎に置いても，応用することが可能になりました。

写真提供：日本評論社



上：伊藤清
下：全国紙上談話会44号

確率解析の発展に決定的な役割を果たした伊藤の公式は，戦争中の困難な状況のもとで発見され，手書き・謄写版刷りの冊子「全国紙上談話会」に発表された。



株価の変動のようなランダムな現象を表すグラフ

流体の方程式

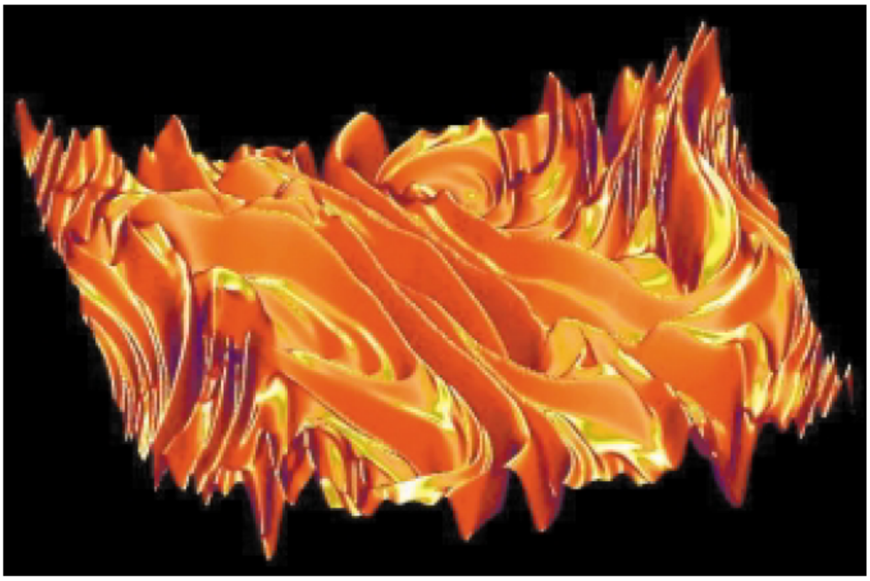
水や空気のような，ものの流れを扱う学問が流体力学です。
確かに「きれいな波紋」や「そよ風のような空気の流れ」が数式で表現できることは想像できるかもしれません。しかし，一見むちゃくちゃなように思える「乱流」さえも，方程式で表現する試みがいま行われているのです。

ナビエ・ストークス方程式

流体力学の基本方程式はナビエ・ストークス方程式という微分方程式です。

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \gamma\ \Delta u + \boldsymbol{K}$$

流体力学の基本方程式ナビエ・ストークス方程式



上：２次元乱流の可視化
平面内の流れのベクトル場が複雑化することを見えるようにするには渦度と呼ばれる量の分布を見るのがよい。
この絵はある時刻での渦度の分布をコンピューターシミュレーションしたものである。激しく振動している様子が見える。

左：整った渦のパターン
このような，乱流と正反対の，きれいな渦もナビエ・ストークス方程式の解としてあらわれます。

数学

70年間の謎

乱流も，きれいな渦のパターンも，ナビエ・ストークス方程式の解析から分かると信じられています。ナビエ・ストークス方程式は，いわば支配方程式なのです。

しかし，この方程式には解が存在するかどうかすら分かっていないのです。

「初期値と境界値を与えたとき，ナビエ・ストークス方程式に解が存在するか」は大きな未解決問題になっています。70年もの間，多くの優れた数学者が，この問題に挑戦してきましたが，彼らの挑戦はことごとく退けられてきました。この問題は，ミレニアムを記念して懸けられた，クレイ研究所の1000万ドルの懸賞問題の一つになっています。

謎はさらに深まる・・・

ナビエ・ストークス方程式には，ごくわずかの対称性もありません。流体の体積以外には保存量もありません。

これは，対称性の高い可積分系とは，正反対の方程式なのです。

だからこそ，乱流のような，複雑な現象を扱う支配方程式となることができます。

対称性も保存量もない方程式は，数学的な取り扱いには，まことにやっかいな方程式なのです。しかし，そこには多くの重要な問題が内包されていて，多くの数学者や物理学者を魅了してきました。

過去70年の間にナビエ・ストークス方程式の理論は着実に進歩してきました。

しかし，理論の進歩は解決した問題と同じくらいのミステリーも生み出してきました。これから解くべき問題は，今まで解かれた問題より遙かに多いでしょう。

流体の運動の数理科学的研究は，21世紀数学の重要なフロンティアです。

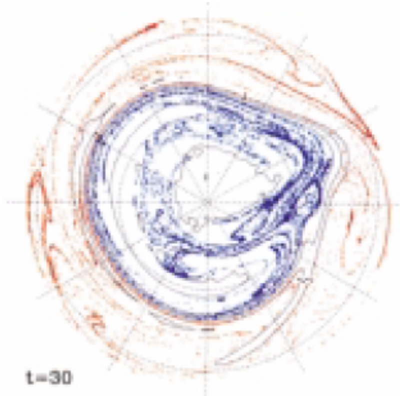
流体の研究にはいろいろな側面があります。基本方程式の理論的な研究。コンピュータを用いた数値実験。これらは，ともに欠かせない研究の両輪で，どちらが欠けても，流体現象を理解することはできないのです。

地球環境を予測する方程式

ナビエ・ストークス方程式は，数学や実験室の域にとどまらず，私たちの住む地球全体の環境さえも「支配」しているといわれています。
実際に行われている数値計算によるシミュレーションをご紹介しましょう。

地球規模での流体運動

地球規模での大気や海洋の運動もナビエ・ストークス方程式に支配されています。日々の気象変化や長期の気候変動は，この方程式をスーパーコンピュータで解いて予測されています。また，同様の数値計算により，不規則に変動する大気や海洋の流れによってエネルギーや物質が地球規模で循環している様子を知ることができます。オゾンホールを念頭においた「墨流し実験」では，成層圏でのオゾン破壊物質の輸送と混合の様子が，実験室内の3次元的な乱流混合と大きく異なっていることがわかりました。



数学

全世界の気候をコンピューターで予測する

世界の気候は，太陽からの熱と地球上に存在する水（水蒸気）を大気・陸・海の間でやり取りすることによって決まりますが，そこには気圧や風速・風向といった様々な気象条件が複雑にからみ合っています。この複雑な現象を全世界的な規模で予測するため，世界各地の気温(T)，湿度(q)，気圧(p)，風速(V)を初期値として，太陽放射による熱力学方程式，水蒸気の連続方程式，風速の運動方程式などに関する微分方程式をコンピューターを用いた大規模な計算によって行ないます。右ページの図は，そのようにして求めた６月から８月の世界の気温と降雨量を示しています。
大域的な分布がほぼ再現されていることがわかります。

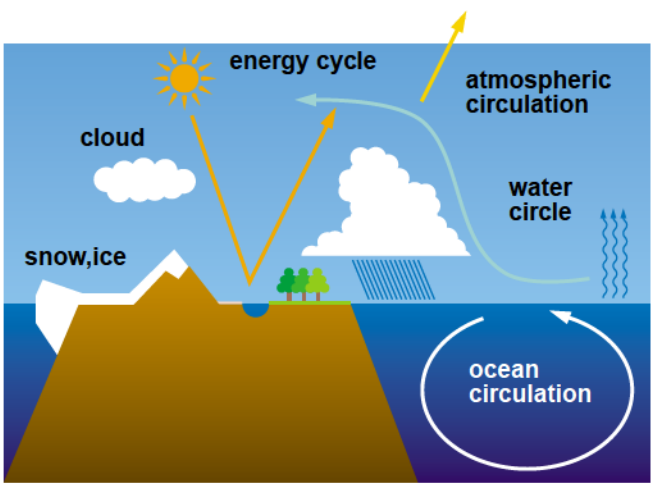
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + F + D(V)$$

$$\frac{dT}{dt} = \Gamma w + Q + D(T)$$

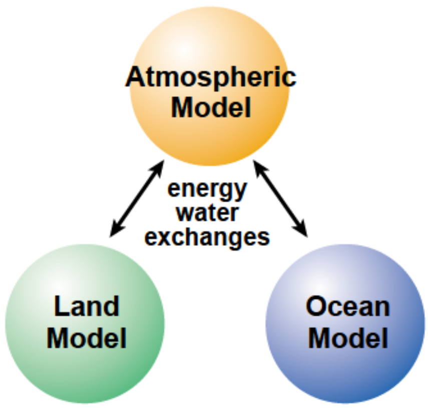
$$\frac{dq}{dt} = E - C + D(q)$$

Climate System ⟶ Climate Model

exchange and transport system
of energy and substance

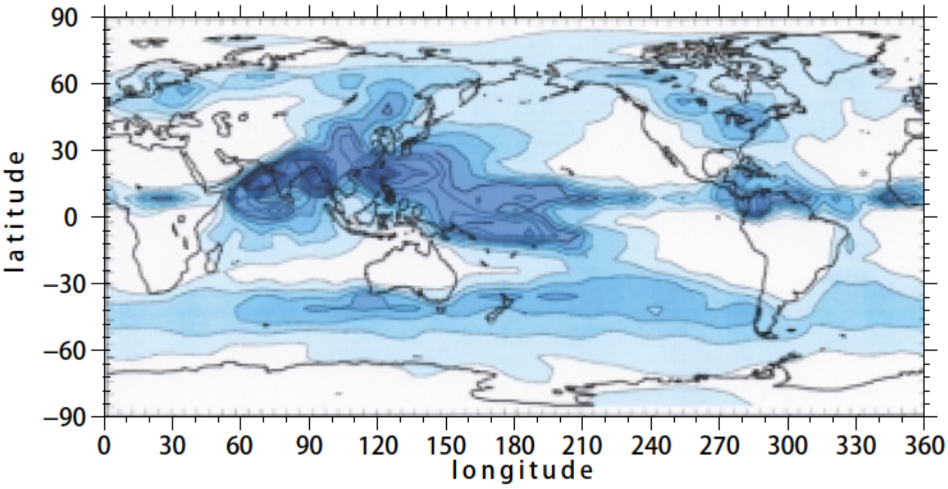


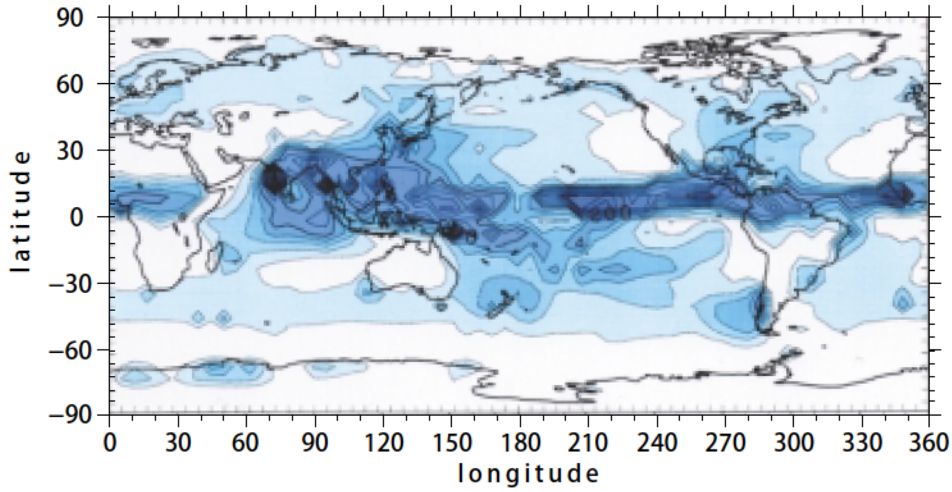
計算モデル



6～8月の世界の降雨量

（上）計算で得られた降雨量分布
（下）実際の降雨量分布





6～8月の世界の気温

（上）計算で得られた気温分布
（下）実際の気温分布